

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

IL PROBLEMA DI POMPEIU

24 MARZO 1988

1. INTRODUZIONE E STORIA DEL PROBLEMA

I risultati qui esposti fanno parte di un lavoro in collaborazione con F. Segala [GS].

Nel 1929 il matematico rumeno D. Pompeiu [P1] pose il seguente problema:

"Per quali insieme limitati $D \subset \mathbb{R}^2$ è vero che se per una data $f \in C(\mathbb{R}^2)$ si ha per ogni movimento rigido σ di \mathbb{R}^2

$$(1.1) \quad \int_{\sigma(D)} f(x) dx = 0,$$

allora $f \equiv 0$?

Quest'affascinante problema, noto come problema di Pompeiu, ha sfidato gli sforzi di molti matematici fin dalla sua formulazione originaria. D'ora in poi diremo che un insieme limitato $D \subset \mathbb{R}^2$ ha la *proprietà di Pompeiu* se il fatto che (1.1) valga implica $f \equiv 0$. In [P1] Pompeiu stesso dimostrò, sotto la ulteriore ipotesi che f vada a zero all'infinito, che ogni quadrato ha la proprietà di Pompeiu. In seguito Christov [Ch] rimosse tale restrizione. In [P3] fu affermato e perfino erroneamente dimostrato che ogni cerchio in \mathbb{R}^2 ha la proprietà di Pompeiu.

Quindici anni più tardi Chakalov [C] rilevò la falsità di tale risultato. Infatti, sia $B_R = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ e scegliamo ad arbitrio $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}) \in \mathbb{R}^2$. Se τ_{x_0} indica la traslazione

$$\tau_{x_0}(x) = x_0 + x \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

si ha, v. [GR, formula 10, p. 401]

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad \int_{\tau_{x_0}(B_R)} \sin(ax_1) dx_1 dx_2 &= 4R^2 \sin(ax_{0,1}) \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \cos(aR \sin u) du \\
 &= \frac{2\pi R}{a} \sin(ax_{0,1}) J_1(aR),
 \end{aligned}$$

dove J_1 denota la funzione di Bessel d'ordine uno.

E' chiaro da (1.2) che se si sceglie $a \in \mathbb{R}$ tale che aR sia uno zero di J_1 si ha per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2$

$$(1.3) \quad \int_{\tau_{x_0}(B_R)} \sin(ax_1) dx_1 dx_2 = 0.$$

Siccome il cerchio è invariante per rotazioni la (1.3) dimostra che il cerchio non ha la proprietà di Pompeiu.

Il problema di dare una caratterizzazione completa, possibilmente geometrica, di quegli insiemi limitati in \mathbb{R}^2 che hanno la proprietà di Pompeiu è a tutt'oggi aperto. Nel seguito diamo un'esposizione della letteratura esistente per poi passare alla discussione di [GS]. Nel 1972 Zaleman ha per primo usato idee d'analisi armonica per dimostrare alcuni risultati concernenti un problema strettamente connesso a quello di Pompeiu, il *problema di Morera*, si veda [Z]:

"Sia $\{\Gamma\}$ una famiglia di curve chiuse rettificabili in \mathbb{C} e sia $f \in C(\mathbb{C})$. Se per ogni movimento rigido σ di \mathbb{R}^2

$$(1.4) \quad \int_{\sigma(\gamma)} f(z) dz = 0 \quad \text{per ogni } \gamma \in \{\Gamma\},$$

è possibile concludere che f è intera?".

Se $\{T\}$ è la famiglia di tutti i triangoli del piano la risposta al precedente quesito è affermativa e nota come Teorema di Morera. Una colle-

zione di curve $\{r\}$ per cui la risposta al problema di Morera è affermativa si dice che ha la *proprietà di Morera*. Zalcman ha osservato in [Z] che:

"Se $D \subset \mathbb{R}^2$ ha bordo rettificabile e se D ha la proprietà di Pompeiu, allora $\{\partial D\}$ ha la proprietà di Morera".

Uno dei principali risultati in [Z] è dato dal seguente

Teorema 1.1. Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ e supponiamo che esistano numeri reali positivi distinti r_1, r_2 tali che per quasi ogni $z \in \mathbb{C}$

$$\int_{C_r(z)} f(z) dz = 0, \quad r \in \{r_1, r_2\},$$

dove $C_r(z) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z| = r\}$. Sia E_1 l'insieme degli zeri della funzione di Bessel J_1 . Se $r_1/r_2 \notin E_1$, f è quasi ovunque coincidente con una funzione intera su \mathbb{C} .

La dimostrazione del Teorema 1.1 poggia sul seguente profondo risultato di Laurent Schwartz. Nel seguito se $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ denotano rispettivamente lo spazio $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, con l'usuale topologia di spazio di Frechet, e il suo duale, lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto, denotiamo con $\hat{T}(z) = T(e^{-i\langle z, \cdot \rangle})$ $z \in \mathbb{C}^n$, la trasformata di Fourier di $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Indichiamo con $\hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n)$ lo spazio

$$\hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n) = \{\hat{T} \mid T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\}.$$

Per il Teorema di Paley-Wiener $\hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n)$ si può identificare con lo spazio di tutte le funzioni intere F su \mathbb{C}^n tali che

$$(1.5) \quad |F(z)| \leq C(1+|z|)^p e^{A|\text{Im}z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

per certi $C > 0$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A > 0$.

Teorema 1.2. (L. Schwartz, [S]). Sia I un ideale di $\hat{\mathcal{O}}'(R)$ le cui funzioni non abbiano zeri in comune in C . Allora esiste una successione $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in I tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_j = 1 \quad \text{in } \hat{\mathcal{O}}'(R).$$

Si dice che $F_j \rightarrow F$ in $\hat{\mathcal{O}}'(R^n)$ se F_j converge a F uniformemente sui sottoinsiemi compatti di C^n e inoltre la F_j verificano la (1.5) con costanti indipendenti da j . A quanto ci risulta la versione multi-dimensionale del Teorema 1.2 costituisce a tutt'oggi un problema aperto.

Nel 1973, riprendendo le idee di Zalcman [Z] basate sul Teorema 1.2 Brown, Schreiber e Taylor hanno dato una caratterizzazione di quei domini di \mathbb{R}^2 per cui vale la proprietà di Pompeiu. Il loro risultato principale è costituito dal seguente

Teorema 1.3. (Brown, Schreiber e Taylor, [BST]). Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^2 con frontiera $\partial\Omega$ curva chiusa rettificabile. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

- (i) Ω ha la proprietà di Pompeiu.
- (ii) Sia χ_Ω la funzione caratteristica di Ω e per $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ poniamo

$$\hat{\chi}_\Omega(z) = \int_{\Omega} e^{-i\langle z, x \rangle} dx$$

Allora non deve esistere alcun $\alpha > 0$ per cui

$$(1.6) \quad \hat{\chi}_\Omega(z) \equiv 0 \quad \text{su } M_\alpha^{\text{def}} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 = \alpha\}$$

- (iii) $\{\partial\Omega\}$ ha la proprietà di Morera.

Alla luce del Teorema 1.3 l'esempio di Chakalov si può così reinterpretare. Sia x_{B_R} la funzione caratteristica del disco in $\mathbb{R}^2 B_R$. Allora (cfr. [Z,(10), p. 242])

$$(1.7) \quad \hat{x}_{B_R}(z, z_2) = 2\pi R \frac{J_1(R \sqrt{z_1^2 + z_2^2})}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Da (1.7) è perciò ovvio che se si sceglie $\alpha > 0$ in modo tale che R/α sia un zero di J_1 , allora

$$\hat{x}_{B_R} \equiv 0 \quad \text{su } M_\alpha,$$

e quindi il disco B_R non ha la proprietà di Pompeiu. Sia ora

$$E_{ab} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1\}.$$

Usando la formula

$$(1.8) \quad \hat{x}_{E_{a,b}}(z_1, z_2) = 2\pi ab \frac{J_1(\sqrt{a^2 z_1^2 + b^2 z_2^2})}{\sqrt{a^2 z_1^2 + b^2 z_2^2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

è immediato verificare che non esiste alcun $\alpha > 0$ tale che $\hat{x}_{E_{ab}} \equiv 0$ su M_α , a meno che $a=b$. Allora per il Teorema 1.3 la regione ellittica E_{ab} ha la proprietà di Pompeiu. Usando lo stesso risultato Brown, Schreiber e Taylor dimostrano che ogni poligono in \mathbb{R}^2 e, più in generale, ogni sottoinsieme convesso con almeno un angolo ha la proprietà di Pompeiu. In [BST] non vengono considerati, a parte alcuni casi particolari quale l'ellisse, domini a frontiera regolare.

Nel 1976 S. Williams ha evidenziato una connessione notevole fra il problema di Pompeiu e la cosiddetta *congettura di Schiffer* (cfr. [Y, Problema 80, p. 688]):

"Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso, con frontiera C^2 . E' vero che l'esistenza di una soluzione non banale del problema sovradeterminato

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta u = -\lambda u & \text{in } \Omega, \quad \lambda > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \text{cost.}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

implica che Ω sia una palla?

Williams ha dimostrato in [W] che, se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, allora esiste una soluzione non banale di (1.9) se e solo se Ω non ha la proprietà di Pompeiu. Osserviamo che dalla identità di Rellich si deduce che se u è soluzione di (1.9), allora posto $u|_{\partial\Omega} = a$ si ha

$$a^2 = \frac{2}{n} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^2 dx,$$

quindi $a \neq 0$. Se perciò si pone

$$v = \frac{u}{\lambda a} - \frac{1}{\lambda}$$

allora u risolve (1.9) se e solo se v è soluzione di

$$(1.10) \quad \begin{cases} \Delta v = -\lambda v - 1 & \text{in } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Tornando al problema (1.9) è immediato verificare che se $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$, allora esistono infinite coppie $(u_j, \lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ che risolvono (1.9). In tal caso, in fatti, la (1.9) diventa

$$(1.11) \quad \begin{cases} r^2 u''(r) + (n-1)ru'(r) + \lambda r^2 u(r) = 0 & \text{in } [0, R] \\ u(R) = a, \quad u'(0) = u'(R) = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzione generale

$$(1.12) \quad u(r) = Cr^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r).$$

Usando l'identità (cfr. [Le, (5.3.3), p. 103])

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_{\nu}(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$$

si ricava da (1.12)

$$(1.13) \quad u'(r) = -C \sqrt{\lambda} r^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda} r).$$

Perchè si verifichi perciò la seconda condizione su u' in (1.11) bisogna che sia $\sqrt{\lambda}R$ uno zero di $J_{\frac{n}{2}}$. Ciò dimostra che vi sono infiniti $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e

infinite (u_j) che risolvono (1.11). Viceversa, Berenstein ha dimostrato in [B] il seguente

Teorema 1.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato e semplicemente connesso, con $\partial\Omega \in C^2$. Se esistono infinite soluzioni di (1.9) allora Ω è un disco.*

Sebbene il Teorema 1.4 non sia direttamente legato al problema di Pompeiu, il metodo di dimostrazione è ingegnoso. L'approccio di Berenstein si basa su uno sviluppo asintotico della trasformata di Fourier di χ_Ω . Per essere più specifici richiamiamo la definizione di M_α , $\alpha > 0$.

$$(1.14) \quad M_\alpha = \{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \tau_1^2 + \tau_2^2 = \alpha\}.$$

Se $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in M_\alpha$ si può scrivere

$$(1.15) \quad \tau = r\xi + it\eta, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r > 0,$$

dove

$$\xi = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \eta = (-\sin\theta, \cos\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Allora si ha

$$\tau_1 = r\cos\theta - it\sin\theta, \quad \tau_2 = r\sin\theta + it\cos\theta$$

e quindi

$$(1.16) \quad \tau_1^2 + \tau_2^2 = r^2 - t^2 = \alpha.$$

Da (1.16) otteniamo che, per $\alpha > 0$ fissato,

$$(1.17) \quad r = |t|(1 + o(\frac{1}{|t|})) \quad \text{quando } |t| \rightarrow +\infty.$$

L'analisi asintotica di $\hat{\chi}_\Omega(\tau_1, \tau_2)$ quando $(\tau_1, \tau_2) \in M_\alpha$, $\alpha > 0$, e quindi vale (1.17), è molto difficile in quanto si ha a che fare con un integrale di Fourier a fase complessa, la cui parte immaginaria oscilla. L'esistenza di infinite soluzioni di (1.9) permette a Berenstein di dedurre, tramite il risultato

di Williams [W] e il Teorema 1.3 che esistono infiniti $\alpha_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, tali che

$$(1.18) \quad \hat{\chi}_\Omega \equiv 0 \quad \text{su} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} M_{\alpha_j}.$$

La (1.18) consente di scegliere $r(t)$ in modo tale che

$$(1.19) \quad \frac{|t|}{\ln r} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |t| \rightarrow +\infty.$$

Per mezzo di una partizione dell'unità si può scrivere $\hat{\chi}_\Omega$ come una somma di integrali del tipo

$$(1.20) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ir\langle \xi, x(s) \rangle} a(s, tn) ds,$$

dove ξ, n sono come in (1.15), e $x(s) = (x_1(s), x_2(s))$ è una parametrizzazione locale di $\partial\Omega$. Le difficoltà nella stima asintotica di (1.20) provengono da quei pezzi di $\partial\Omega$ dove non vi sono punti critici della fase $\langle \xi, x(s) \rangle$. Una stima rozza del corrispondente integrale si ottiene prendendo il valore assoluto di I , desumendo per una $A > 0$

$$(1.21) \quad |I| \leq C \frac{(1+|t|)}{r} e^{A|t|}.$$

Se ora si fa uso della (1.19) si ha

$$(1.22) \quad I = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{quando} \quad r \rightarrow +\infty$$

La (1.22) è il punto cruciale della dimostrazione del seguente

Teorema 1.5. (Berenstein, [B]). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato semplicemente connesso avente frontiera analitica. Supponiamo che in questi punti x_1, x_1, \dots, x_n $\partial\Omega$ in cui la normale a $\partial\Omega$ è parallela a $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$,

le corrispondenti curvature di $\partial\Omega$, k_1, k_2, \dots, k_n siano diverse da zero. Se $z \in \mathbb{C}^2$ è come in (1.15) con r, t verificanti (1.19), allora quando $r \rightarrow +\infty$ vale

$$(1.23) \quad \hat{x}_{\partial\Omega}(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left\{ \sum_{j=1}^n |k_j|^{-1/2} \sigma_j \exp(-i\langle x_j, z \rangle) + o(1) \right\},$$

dove $\sigma_j = \tau_j \exp((-i \frac{\pi}{4}) \text{sign } k_j)$, e τ_j è il versore (complesso) tangente a $\partial\Omega$ in x_j .

In [6S] si ottiene sotto opportune ipotesi sul dominio Ω uno sviluppo asintotico di $x_\Omega(z)$ quando $z \in M_\alpha$ e quindi r, t sono legati dalla (1.17). Sembra naturale in tale contesto considerare integrali del tipo

$$(1.24) \quad I = \int_{\Gamma} e^{-i\langle x, z \rangle} (dx_1 + i dx_2) \quad , \quad z \in M_\alpha \quad ,$$

dove Γ è una curva chiusa che giace su una fissata superficie V in \mathbb{C}^2 . Si ottiene così uno sviluppo asintotico di I che è completamente caratterizzato in termini della geometria di V e non dipende dalla parametrizzazione di Γ . Il metodo utilizzato è quello del *punto di sella* ideato da Riemann per stimare asintoticamente la funzione ipergeometrica confluyente, [R]. Tale metodo forza un "passaggio al complesso" che non consente di dare direttamente uno sviluppo asintotico di (1.24) in termini della geometria di Γ quando questa curva giaccia in \mathbb{R}^2 . Come applicazione dell'analisi asintotica sopracitata noi otteniamo la proprietà di Pompeiu per una classe di domini piani le cui frontiere sono *sezioni in \mathbb{R}^2* di superfici analitiche in \mathbb{C}^2 .

2. SVILUPPI ASINTOTICI PER UNA CLASSE DI INTEGRALI DI FOURIER A FASE COMPLESSA E APPLICAZIONI

Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso contenente la retta reale \mathbb{R} e siano

$$x_i : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad i = 1, 2,$$

due funzioni analitiche di periodo 2π . Consideriamo la "superficie" di \mathbb{C}^2 definita da

$$(2.1) \quad V = \{x(z) = (x_1(z), x_2(z)) \mid z \in D\}.$$

Se \tilde{D} è l'identificazione in \mathbb{R}^2 di D e

$$(2.2) \quad \lambda_j(u, v) = \operatorname{Re} x_j(u, v), \quad \mu_j(u, v) = \operatorname{Im} x_j(u, v), \quad j = 1, 2, (u, v) \in \tilde{D}$$

possiamo identificare V con una superficie in \mathbb{R}^4 ponendo

$$(2.3) \quad \tilde{V} = \{(\lambda_1(u, v), \lambda_2(u, v), \mu_1(u, v), \mu_2(u, v)) \mid (u, v) \in \tilde{D}\}.$$

Sia Γ una curva su V . Siamo interessati allo studio asintotico di

$$(2.4) \quad \zeta \rightarrow \int_{\Gamma} e^{-i\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2)$$

quando $\zeta \in M_{\alpha}$, $\alpha > 0$. L'integrale in (2.4) è così definito.

Assumiamo che esista un'unica curva γ in D , tale che

$$(2.5) \quad \Gamma = \{x(\gamma(\theta)) \mid \theta \in [a, b]\}.$$

Allora

$$(2.6) \quad \int_{\Gamma} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_1 + i dx_2 = \int_{\gamma} e^{-i\langle x(z), \zeta \rangle} (x'_1(z) + i x'_2(z)) dz$$

dove si è posto $x'_i(z) = \frac{dx_i}{dz}(z)$, $i = 1, 2$. Osserviamo che se $\zeta \in M_{\alpha}$ allora $i\zeta \in M_{-\alpha}$ e quindi possiamo riscrivere (2.6) usando (1.15) come

$$(2.7) \quad \int_{\gamma} e^{-(r\langle x, \xi \rangle + it\langle x, \eta \rangle)} (x'_1 + i x'_2) dz$$

con $\zeta \in M_{-\alpha}$. Sviluppando in serie di Taylor otteniamo da (2.7) per $\zeta \in M_{-\alpha}$

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \int_{\Gamma} e^{-\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) &= \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi + i\eta \rangle} (x'_1 + i x'_2) dz \\ &- i(t-r) \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi + i\eta \rangle} \langle x, \eta \rangle (x'_1 + i x'_2) dz \\ &- \frac{(t-r)^2}{2} \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi + i\eta \rangle} \langle x, \eta \rangle^2 (x'_1 + i x'_2) dz \\ &+ \frac{i}{6} (t-r)^3 \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi \rangle} k(t, r, z) (x'_1 + i x'_2) dz. \end{aligned}$$

Usando la (1.17) otteniamo la seguente stima del resto nell'ultimo integrale a secondo membro di (2.8)

$$(2.8) \quad |k(t, r, z)| \leq C |e^{-ir\langle x, \eta \rangle}| e^{|t-r|} \quad \text{su } \gamma.$$

Assumiamo ora che Γ sia una curva semplice e chiusa. Allora (si v. (S.5))

$$(2.9) \quad \gamma(a) = \gamma(b) \quad \text{oppure} \quad |\gamma(a) - \gamma(b)| = 2\pi.$$

Se poniamo

$$(2.10) \quad \psi(z) = \langle x(z), \xi + i\eta \rangle,$$

risulta

$$(2.11) \quad \psi = \langle x, \xi + i\eta \rangle = (x_1 + ix_2) e^{-i\theta}.$$

Un'integrazione per parti, (2.9) e (2.11) danno

$$(2.12) \quad \int_{\gamma} e^{-i\langle x(z), \zeta \rangle} (x_1'(z) + ix_2'(z)) dz = 0.$$

Usando (2.12) e (2.8) otteniamo per $\zeta \in M_{-\alpha}$

$$(2.13) \quad \int_{\Gamma} e^{-\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) = -i(t-r) \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi + i\eta \rangle} \langle x, \eta \rangle (x_1' + ix_2') dz \\ - \frac{(t-r)^2}{2} \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi + i\eta \rangle} \langle x, \eta \rangle^2 (x_1' + ix_2') dz \\ + \frac{i}{6} (t-r)^2 \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi \rangle} k(t, r, z) (x_1' + ix_2') dz.$$

Esaminiamo ora i punti critici della fase

$$\langle x, \xi + i\eta \rangle$$

degli integrali a secondo membro di (2.13). Questi sono i punti $z_0 \in D$ in cui si ha

$$(2.14) \quad \alpha x'(z_0), \xi + i\eta > 0, \text{ dove } x'(z_0) = (x'_1(z_0), x'_2(z_0))$$

Usando le equazioni di Cauchy-Riemann si riconosce che i punti z_0 in cui (2.14) vale si caratterizzano come quei punti in cui il vettore di \mathbb{R}^4 $(\xi, -\eta)$ è ortogonale alla superficie \tilde{V} in (2.3) nel punto $(\lambda_1(z_0), \lambda_2(z_0), \mu_2(z_0)) = (\lambda(z_0), \mu(z_0))$.

Usiamo (2.11) per riscrivere (2.13)

$$(2.15) \quad \int_{\Gamma} e^{-\langle x, \xi \rangle} (dx_1 - i dx_2) = -i(t-r)e^{i\theta} \int_{\gamma} e^{-r\psi \langle x, n \rangle} \psi' dz \\ - \frac{(t-r)^2}{2} e^{i\theta} \int_{\gamma} e^{-r\psi \langle x, n \rangle^2} \psi' dz \\ + \frac{i}{6} (t-r)^2 e^{i\theta} \int_{\gamma} e^{-r\langle x, \xi \rangle} K\psi' dz.$$

Ora assumiamo che esista almeno un punto $z_0 \in D$ per cui vale (2.14). Per poter applicare il metodo del punto di sella richiediamo inoltre che esista un $\theta \in [0, 2\pi]$ e una curva C^1 γ tutta contenuta nella regione

$$\operatorname{Re} \psi(z) \geq \operatorname{Re} \psi(z_1).$$

Non è restrittivo supporre che γ sia in realtà contenuto nella regione $\operatorname{Re} \psi(z) > \operatorname{Re} \psi(z_1)$, facendo al più eccezione di altri punti critici z_2, \dots, z_n tali che

$$(2.16) \quad \operatorname{Re} \psi(z_j) = \operatorname{Re} \psi(z_1), \quad j = 2, \dots, n.$$

L'esistenza di γ come sopra ha una ben precisa interpretazione geometrica, v. [GS]. A questo punto rimandiamo a [GS] per un'analisi dettagliata di (2.15). Diciamo soltanto che l'identità finale a cui si perviene è

$$(2.17) \quad \int_{\Gamma} e^{-\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) = i \frac{(t-r)}{r} e^{i\theta} \int_{\gamma} e^{-r\psi \langle x', n \rangle} dz - \frac{(t-r)^2}{r} e^{i\theta} \int_{\gamma} e^{-r\psi \langle x, n \rangle \langle x', n \rangle} dz - \frac{(t-r)^3}{6} e^{i\theta} q(t, r)$$

dove

$$(2.18) \quad |q(t, r)| \leq C e^{-r \operatorname{Re} \psi(z_1)} e^{C|t-r|}.$$

A questo punto s'applica il metodo di Riemann del punto di sella agli integrali che compaiono nella (2.17), si v. ad es. [01, Th. 7.1, p. 127]

$$(2.19) \quad \int_{\gamma} e^{-r\psi \langle x', n \rangle} dz = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^n e^{-r\psi(z_j)} (a_j + O(\frac{1}{r}))$$

$$(2.20) \quad \int_{\gamma} e^{-r\psi \langle x, n \rangle \langle x', n \rangle} dz = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^n e^{-r\psi(z_j)} (b_j + O(\frac{1}{r}))$$

dove

$$(2.21) \quad a_j = \frac{\langle x'(z_j), n \rangle}{(2\psi''(z_j))^{1/2}}, \quad b_j = \frac{\langle x(z_j, n) \langle x'(z_j), n \rangle \rangle}{(2\psi''(z_j))^{1/2}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Usando (2.18)-(2.21) in (2.17) si perviene infine al seguente sviluppo per $\zeta \in M_{-\alpha}$

$$(2.22) \quad \int_{\Gamma} e^{-\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) = i \frac{t-r}{r^{3/2}} e^{i\theta} \sum_{j=1}^n e^{-\langle x(z_j), \zeta \rangle} \{a_j + O(\frac{1}{r})\}.$$

Usando la (1.17) nella (2.22) si perviene così al seguente teorema

che costituisce il risultato principale di [GS].

Teorema 2.1. (cfr. [GS]). Sia V una superficie in \mathbb{C}^2 e sia Γ una curva chiusa su V . Identificando V con una superficie in \mathbb{R}^4 assumiamo che:

- (i) Γ passi per n punti x_1, \dots, x_n di V in cui il piano tangente sia ortogonale al vettore $(\xi, -\eta) \in \mathbb{R}^4$, con $\xi = (1, 0)$, $\eta = (0, 1)$, e perciò a ogni vettore $(\xi, -\eta)$ con $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\eta = (-\sin\theta, \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$;
- (ii) per qualche $\theta \in [0, 2\pi]$, Γ giaccia da un solo lato dell'iperpiano normale a $(\xi, -\eta)$ e passante per x_1, \dots, x_n .

Allora per $\zeta \in M_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, vale

$$(2.23) \quad \int_{\Gamma} e^{-\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) = \frac{i\alpha}{2r^{5/2}} e^{i\theta} \sum_{j=1}^n e^{-\langle x_j, \zeta \rangle} (a_j + o(\frac{1}{r}))$$

quando $r \rightarrow +\infty$. I coefficienti a_j in (2.23) sono dati da (2.21). Per ogni $j=1, \dots, n$ si ha $a_j \neq 0$.

Si confronti ora la (2.23) con la (1.23). La prima contiene la potenza $r^{-5/2}$ mentre la seconda $r^{-1/2}$. Tale differenza è dovuta al fatto che mentre il risultato di Berenstein si basa sull'assunzione piuttosto forzata che

$$r \sim e^{t^2} \quad \text{quando } |t| \rightarrow +\infty,$$

il Teorema 2.1 viene dimostrato sotto la sola ipotesi che

$$r \sim |t| \quad \text{quando } |t| \rightarrow +\infty.$$

A illustrazione delle ipotesi del Teorema 2.1 riportiamo due esempi significativi.

Esempio 2.1. Il cerchio in \mathbb{C}^2 . Sia $a > 0$. Poniamo

$$(2.24) \quad V = \{(a \cos z, a \sin z) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

e identifichiamo V con

$$(2.25) \quad \tilde{V} = \{(a \cos u \cosh v, a \sin u \cosh v, -a \sin u \sinh v, a \cos u \sinh v) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

Poniamo per $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$

$$(2.26) \quad X = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \frac{\partial \mu}{\partial u} \right), \quad Y = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \frac{\partial \mu}{\partial v} \right)$$

La condizione che il piano tangente in un punto di \tilde{V} sia ortogonale al vettore di \mathbb{R}^4 $(\xi, -\eta)$, con $\xi = (1, 0)$, $\eta = (0, 1)$, si esprime così

$$(2.27) \quad \langle X, (\xi, -\eta) \rangle = 0, \quad \langle Y, (\xi, -\eta) \rangle = 0.$$

Usando ora la definizione (2.25) di \tilde{V} otteniamo per (2.27)

$$\sin u (\cosh v - \sinh v) = 0$$

$$\cos u (\cosh v - \sinh v) = 0,$$

da cui si deduce che sul cerchio in \mathbb{R}^4 non v'è alcun punto in cui il piano tangente è ortogonale a $(\xi, -\eta)$. Si ricordi che la sezione del cerchio in \mathbb{R}^4 con \mathbb{R}^2 , il cerchio nel piano, non ha la proprietà di Pompeiu.

Esempio 2.2. L'ellisse in \mathbb{C}^2 . Siano $a, b > 0$ e poniamo

$$(2.28) \quad V = \{(a \cos z, b \sin z) \mid z \in \mathbb{C}\},$$

che identifichiamo con

$$(2.29) \quad \tilde{V} = \{(a \cos u \cosh v, b \sin u \cosh v, -a \sin u \sinh v, b \cos u \sinh v) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Le (2.27) si leggono ora così

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \sin u (a \cosh v - b \sinh v) &= 0 \\ \cos u (a \sinh v - b \cosh v) &= 0. \end{aligned}$$

Le (2.30) ammettono le soluzioni

$$(2.31) \quad \left(k\pi, \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a+b}{a-b}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vi sono perciò, in base a quanto precedentemente osservato, infiniti punti critici della fase $z \mapsto \langle x(z), \xi + i\eta \rangle$, $z \in \mathbb{C}$, dove $x(z) = (a \cos z, b \sin z)$.

Il Teorema 2.1 può essere usato per dedurre la proprietà di Pompeiu per una certa classe di domini analitici di \mathbb{C} . Sia infatti

$$V = \{x(z) = (x_1(z), x_2(z)) \mid z \in D\}$$

come in precedenza e assumiamo che Ω sia un aperto limitato semplicemente connesso

di C tale che

$$\partial\Omega = \{x(z) \mid z \in D, \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Vale allora il seguente

Teorema 2.2. *Se esiste una curva chiusa Γ su V che abbia le proprietà (i), (ii) del Teorema 2.1., che sia omotopa a $\partial\Omega$, e se risulta per $r \rightarrow +\infty$*

$$(2.32) \quad \sum_{j=1}^n e^{-ir\langle x_j, (\xi, n) \rangle} a_j \neq 0,$$

allora Ω ha la proprietà di Pompeiu.

Nella (2.32) se z_1, \dots, z_n sono i punti critici della fase $\langle x(z), \xi + in \rangle$ s'è posto $x_j = x(z_j)$, mentre a_j sono definiti come in (2.21). Osserviamo esplicitamente che la (2.32) è verificata se e solo se esistono $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, tali che

$$(2.33) \quad \langle x_i, (\xi, n) \rangle \neq \langle x_j, (\xi, n) \rangle,$$

oppure se

$$(2.34) \quad \sum_{j=1}^n a_j \neq 0.$$

Osserviamo inoltre che (2.33) equivale a dire che non tutti i punti x_1, \dots, x_n appartengono all'iperpiano normale a (ξ, n) .

In [GS] vengono dati alcuni esempi di applicazione del Teorema 2.2. Riportiamo qui quello significativo dell'ellisse.

Esempio 2.3. L'ellisse in \mathbb{R}^2 .

Siano $0 < b < a$ e consideriamo $\Omega = E_{ab} \subset \mathbb{R}^2$ tale che

$$\partial\Omega = \{ (a \cos s, b \sin s) \mid 0 \leq s \leq 2\pi \}.$$

Sia V come in (2.28). Se poniamo, cfr. (2.11),

$$(2.35) \quad \psi(z) = e^{-i\theta} (a \cos z + ib \sin z),$$

i punti critici di ψ sono dati dalla (2.31), cioè

$$(2.36) \quad z_k = k\pi + i \frac{1}{z} \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se prendiamo $\theta = 0$ in (2.35), poniamo

$$z_1 = \pi + i \frac{1}{z} \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right)$$

Consideriamo la regione

$$(2.37) \quad \operatorname{Re} \psi(z) \geq \operatorname{Re} \psi(z_1).$$

Questa è rappresentata come in figura

Scegliamo γ come nella figura e poniamo

$$(2.38) \quad \Gamma = \{(a \cos \gamma(\tau), b \sin \gamma(\tau)) \mid \tau \in [a, b]\}.$$

Allora la (2.32) del Teorema 2.1 dà via al Teorema di Cauchy

$$(2.31) \quad \int_{\partial\Omega} e^{-\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) = \int_{\Gamma} e^{-\langle x, \xi \rangle} (dx_1 + i dx_2) \\ = \int_{\gamma} e^{-\langle x(z), \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) = \frac{i\alpha}{2r^{5/2}} e^{r\sqrt{a^2-b^2}} (a_1 + O(\frac{1}{r}))$$

quando $\zeta = (r, it) \in M_{-\alpha}$ e $r \rightarrow +\infty$.

La (2.35) dà una dimostrazione, diversa da quella basata sulla (1. del fatto che $\Omega = E_{ab}$ ha la proprietà di Pompeiu.

Se in (2.35) prendiamo invece $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z_1 = \frac{i}{2} \ln(\frac{a+b}{a-b})$, e consideriamo la regione $\operatorname{Re} \psi(z) \geq \operatorname{Re} \psi(z_1)$ questa è data dal grafico

Se γ è come nella figura sia Γ definita come in (2.38). Applicando nuovamente (2.32) otteniamo

$$(2.40) \quad \int_{\partial\Omega} e^{-\langle x, \zeta \rangle} (dx_1 + i dx_2) = \\ = -\frac{\alpha}{2r^{5/2}} \{e^{ir\sqrt{a^2-b^2}} a_1 + e^{-ir\sqrt{a^2-b^2}} a_2 + O(\frac{1}{r})\}$$

quando $\zeta = (it, -r) \in M_{-\alpha}$ e $r \rightarrow +\infty$.

La (2.40) implica di nuovo che $\chi_{\Omega} \neq 0$ su M_{α} e quindi Ω ha la proprietà di Pompeiu.

BIBLIOGRAFIA

- [B] C.A. BERENSTEIN, An inverse spectral theorem and its relation to the Pompeiu problem, J. d'An. Math., vol. 37 (1980), 128-144.
- [BST] L. BROWN, B.M. SCHREIBER and A.B. TAYLOR, Spectral synthesis and the Pompeiu problem, Ann. Inst. Fourier, 23 (3), (1973), 125-154.
- [C] L. CHARALOV, Sur un probleme de D. Pompeiu, Annaire Univ. Sofia Fac. Phys. Math., Livre 1, 40, 1-44 (1944).
- [Ch] C. CHRISTOV, Sur une probleme de M. Pompeiu, Mathematica, 23 (1947-48), 103-107.
- [GS] N. GAROFALO and F. SEGALA, Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem, preprint.
- [P1] D. POMPEIU, Sur certains systemes d'equations lineaires et sur une propriété intégrale des fonctions de plusieurs variables, C.R. Acad. Sci. Paris, 188 (1929) 1138-1139.
- [P2] D. POMPEIU, Sur une propriété integrale des fonctions de deux variables réelles, Bull. Sci. Acad. Royale Belgique, (5), 15 (1929), 265-269.
- [R] B. RIEMANN, Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita, Complete works, Dover, N.Y. (1953).
- [S] L. SCHWARTZ, Theorie generale des fonctions moyenne-periodique, Ann. of Math., 48 (1947), 857-929.
- [W] S.A. WILLIAMS, A partial solution of the Pompeiu problem, Math. Ann., 223 (1976), 183-190.
- [Y] S.T. YAU, Seminar on differential geometry, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, no. 102 (1982).
- [Z] L. ZALCMAN, Analyticity and the Pompeiu problem, Arch. Rat. Mech. An., vol. 47 (1972), 237-254.